

# 基于改进集的参数集值优化问题解集映射的稳定性\*

孟旭东

南昌航空大学科技学院, 江西 共青城 332020

**摘要:** 在实赋范线性空间中讨论了基于改进集的参数集值优化问题解集映射的稳定性。在目标函数具有  $C$ -Hausdorff 连续性和  $E$ -闭性及可行集具有连续性和紧凸性条件下, 分析了关于改进集  $E$  的水平集值映射的上半连续性和下半连续性。在此基础上, 在目标函数构成的序偶映射具有严格  $E$ -拟凸性基本假设下, 通过分析的方法获得了具改进集的参数集值优化问题解集映射的 Berge 连续性、Hausdorff 连续性、 $C$ -Hausdorff 连续性和紧闭性定理。

**关键词:** 解集映射; 改进集; 稳定性; 连续性; 参数集值优化问题

**中图分类号:** O221.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 02-0180-09

## Stability of solution set mapping for parametric set-valued optimization problems via improved sets

MENG Xudong

Science and Technology College of NCHU, Gongqingcheng 332020, China

**Abstract:** The stability of solution set mapping for parameter set-valued optimization problems via improved sets in real normed vector space is discussed. The upper semi-continuity and lower semi-continuity of level set-valued mappings via improved sets  $E$  is analyzed under the conditions that the objective function having  $C$ -Hausdorff continuity and  $E$ -closure and the feasible set having continuity and compact convexity. On this basis, through the method of analysis, the theorems of the Berge continuity, Hausdorff continuity,  $C$ -Hausdorff continuity compactness and closeness of solution set mapping for parametric set-valued optimization problems via improved sets are obtained by the method of analysis with the help of the basic assumption of strict-quasi-convexity for the ordered-even mappings composed of objective functions.

**Key words:** solution set mapping; improved sets; stability; continuity; parameter set-valued optimization problems

在可行集和目标函数扰动下关于最优化问题解集的稳定性是一项具有重大意义的研究课题。到目前为止, 许多作者研究了此类问题<sup>[1-10]</sup>。当目标函数和可行集被扰动或两者均被扰动时, 得到了有效解映射和多函数极小点的相关稳定性结果。在有限维欧氏空间中, Cheng 等<sup>[11]</sup>利用线性标量化方法得到了参数弱向量变分不等式解集映射的上半连续性和下半连续性。据文献[11]的思想, Gong<sup>[12]</sup>分析了参数弱向量平衡问题解集映射的连续性。运用标量化技巧, Gong 等<sup>[13]</sup>讨论了广义参数系统解集映射的下半连续性。

\* 收稿日期: 2020-08-15

录用日期: 2020-12-17

网络首发日期: 2021-06-02

基金项目: 国家自然科学基金(11201216); 江西省教育厅科学技术重点研究项目(GJJ181565, GJJ191614, GJJ218701); 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ161597, GJJ181567); 校级重点科学技术研究项目(KJKT2108)

作者简介: 孟旭东(1982年生), 男; 研究方向: 向量优化理论及应用; E-mail: mxudongm@163.com

在没有一致紧性假设的实局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中, Chen 等<sup>[14]</sup>建立了强向量平衡问题解集映射的连续性定理。在不具映射单调性和(近似)解集映射信息的情况下, 文献[15-16]利用线性标量化方法和稠密性结果分析了(近似)解集映射的半连续性。

最近, 在有限维空间中, Chicco 等<sup>[17]</sup>引入了改进集  $E$ -最优点的概念, 并讨论了  $E$ -最优点的存在性。随后, Gutiérrez 等<sup>[18]</sup>将  $E$ -最优点的概念推广到一般序偶线性空间, 并通过标量化方法得到了向量优化问题  $E$ -最优解的充要条件。在 Wjmann 意义下的集合序列的收敛性下, Zhao 和 Yang 在文献[19-20]中利用改进集得到了扰动下的统一稳定性结果, 并给出了向量优化问题的  $E$ -Benson 真有效解的标量化定理。Oppezzi 和 Rossi 在文献[21-22]中讨论了  $E$ -最优解存在的最优条件和稳定性。Xu 等<sup>[23]</sup>利用  $u$ -下序映射的半连续性, 得到了参数集合优化问题最小解集映射的连续性。在目标映射非紧性的基本条件下, 借助水平映射的连续性, Khoshkhabar-amiranloo<sup>[24]</sup>讨论了集合优化问题最小解集映射的稳定性。在适当的条件下, Mao 等<sup>[25]</sup>利用改进集建立了参数集合优化问题解集映射的上半连续性, Hausdorff 上半连续性和下半连续性。孟旭东等<sup>[26]</sup>在拓扑向量空间中研究了双参广义集值优化问题解集映射连续的最优性条件。孟旭东等<sup>[27]</sup>借助向量函数的凸性和单调性, 应用分析方法建立了参数强向量原始与对偶均衡问题解映射 Lipschitz 连续的充分性定理。邵重阳等<sup>[28]</sup>讨论了一类新的参数广义向量拟均衡问题解映射的稳定性, 获得了解映射 Berge 连续性的充分必要条件。Peng 等<sup>[29]</sup>建立了具改进集的弱广义对称 Ky Fan 不等式问题解映射的上半连续性和下半连续性的标量化定理。众所周知, 集值映射的  $C$ -Hausdorff 连续性弱于 Berge 连续性。在  $C$ -Hausdorff 连续性条件下, Xu 等<sup>[30]</sup>建立了参数集值向量优化问题最小解集映射的半连续性定理。

受文献[23-25, 30]研究的启发, 在  $C$ -Hausdorff 连续性基本假设下, 利用水平映射方法研究具改进集的参数集值优化问题解集映射的稳定性。

## 1 背景知识

本文设  $X, Y, \Lambda, \Omega$  为实赋范线性空间,  $C \subseteq Y$  为闭凸点锥且  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ 。据文献[17]知, 非空集合  $B \subseteq Y$  关于锥  $C$  的上综合集  $u\text{-compr}(B)$  定义为  $u\text{-compr}(B) = B + C$ 。非空集合  $E \subseteq Y$  称为上综合集, 如果  $u\text{-compr}(E) = E$ 。非空上综合集  $E \subseteq Y$  称为关于锥  $C$  的改进集, 如果  $0 \notin E$ 。非空集合  $A \subseteq Y$  称为  $E$ -闭集, 如果  $A + E$  为闭集。

**定义 1<sup>[1]</sup>** 设  $A \subseteq Y$  为非空子集, 点  $a \in A$  称为集合  $A$  的最小点, 如果  $(A - a) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$ 。

记  $A$  的所有最小点的全体为  $\text{Min}(A)$ 。

**引理 1<sup>[1]</sup>** 设  $A \subseteq Y$  为非空紧子集。则  $\text{Min}(A) \neq \emptyset$  且  $A \not\subset A - C \setminus \{0\}$ 。

设  $E \subseteq Y$  为改进集, 据文献[32]知, 非空集合  $A, B \subseteq Y$  关于  $E$  的下序关系 “ $\leq_E^l$ ” 定义为

$$A \leq_E^l B \Leftrightarrow B \subseteq A + E.$$

**引理 2<sup>[25]</sup>** 设  $E \subseteq Y$  为改进集, 且  $0 \in \text{cl}(E) \subseteq C$ , 则  $\text{int}(C) \subseteq E \subseteq C \setminus \{0\}$ 。

**引理 3<sup>[18]</sup>** 设  $E \subseteq Y$  为改进集, 且  $0 \notin \text{cl}(E)$ , 则

(i)  $\text{int}(C) + E \subseteq \text{int}(E)$  且  $\text{int}(E) \neq \emptyset$ 。

(ii)  $C + \text{int}(E) = \text{int}(E)$ 。

设  $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}, K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 对每个  $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$ , 讨论以下含参集值优化问题 (PSVOP):

$$\text{Min } F(x, \lambda, \mu), \text{ s.t. } x \in K(\mu).$$

$$\text{记 } K(\Omega) = \bigcup_{\mu \in \Omega} K(\mu).$$

**定义 2** 对每个  $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$ , 设  $K(\mu) \subseteq X$  为非空子集,  $x_0 \in K(\mu)$  称为问题(PSVOP)关于改进集  $E$  的  $l$ -最小解, 如果  $x \in K(\mu)$  满足  $F(x, \lambda, \mu) \leq_E^l F(x_0, \lambda, \mu)$ , 则有

$$F(x_0, \lambda, \mu) \leq_E^l F(x, \lambda, \mu).$$

记问题(PSVOP)关于改进集  $E$  的  $l$ -最小解的全体为  $S_{F,E}(\lambda, \mu)$ 。

本文总假设对每个  $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega, S_{F,E}(\lambda, \mu) \neq \emptyset$ , 讨论  $S_{F,E}$  在  $\Lambda \times \Omega$  上的稳定性。

**定义 3** 设  $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ ,  $K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 关于改进集  $E$  的水平集值映射  $L_{F,E}: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  定义为

$$\begin{aligned} L_{F,E}(y, \lambda, \mu) &= \{x \in K(\mu): F(x, \lambda, \mu) \leq_E F(y, \lambda, \mu)\} \\ &= \{x \in K(\mu): F(y, \lambda, \mu) \subseteq F(x, \lambda, \mu) + E\}, \quad (y, \lambda, \mu) \in X \times \Lambda \times \Omega. \end{aligned}$$

记  $L_{F,E}$  的定义域为  $D_{L_{F,E}}$ , 其中  $D_{L_{F,E}} = \{(y, \lambda, \mu) \in X \times \Lambda \times \Omega: L_{F,E}(y, \lambda, \mu) \neq \emptyset\}$ .

**定义 4** 设  $X_0 \subseteq X$  为非空凸子集,  $E \subseteq Y$  为改进集,  $F: X_0 \times \Lambda \times \Omega \subseteq X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$  为给定集值映射, 对每个  $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$ , 称  $F$  在  $X_0$  上为严格  $E$ -拟凸的, 如果对任意  $x_0, x_1, x_2 \in X_0$ ,  $x_1 \neq x_2$  及  $t \in (0, 1)$  满足

$$F(x_0, \lambda, \mu) \subseteq F(x_1, \lambda, \mu) + E, \quad F(x_0, \lambda, \mu) \subseteq F(x_2, \lambda, \mu) + E,$$

则有

$$F(x_0, \lambda, \mu) \subseteq F(tx_1 + (1-t)x_2, \lambda, \mu) + \text{int}(E).$$

**定义 5**<sup>[12-14,31]</sup> 设  $T_1, T_2$  为拓扑空间,  $M: T_1 \rightarrow 2^{T_2} \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 给定  $x_0 \in T_1$ , 则

(i)  $M$  在  $x_0$  处 Berge 上半连续当且仅当对  $M(x_0)$  的任何邻域  $W \subseteq T_2$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x) \subseteq W$ .

(ii)  $M$  在  $x_0$  处 Berge 下半连续当且仅当对任何开集  $W \subseteq T_2$ , 满足  $M(x_0) \cap W \neq \emptyset$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x) \cap W \neq \emptyset$ .

(iii)  $M$  在  $T_1$  上 Berge 上(下)半连续当且仅当  $M$  在  $T_1$  上的每一点处皆为 Berge 上(下)半连续。此时,  $M$  在  $T_1$  上 Berge 连续, 如果  $M$  在  $T_1$  上既 Berge 上半连续又 Berge 下半连续。

(iv)  $M$  在  $x_0$  处 Hausdorff 上半连续当且仅当对  $0 \in T_1$  的任何邻域  $W \subseteq T_2$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x) \subseteq M(x_0) + W$ .

(v)  $M$  在  $x_0$  处 Hausdorff 下半连续当且仅当对  $0 \in T_1$  的任何邻域  $W \subseteq T_2$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x_0) \subseteq M(x) + W$ .

(vi)  $M$  在  $T_1$  上 Hausdorff 上(下)半连续当且仅当  $M$  在  $T_1$  上的每一点处皆为 Hausdorff 上(下)半连续。此时,  $M$  在  $T_1$  上为 Hausdorff 连续, 如果  $M$  在  $T_1$  上既 Hausdorff 上半连续又 Hausdorff 下半连续。

(vii)  $M$  在  $x_0$  处  $C$ -Hausdorff 上半连续当且仅当对  $0 \in T_1$  的任何邻域  $W \subseteq T_2$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x) \subseteq M(x_0) + W + C$ .

(viii)  $M$  在  $x_0$  处  $C$ -Hausdorff 下半连续当且仅当对  $0 \in T_1$  的任何邻域  $W \subseteq T_2$ , 存在  $x_0$  的邻域  $U \subseteq T_1$ , 使得对任意  $x \in U$ , 有  $M(x_0) \subseteq M(x) + W + C$ .

(ix)  $M$  在  $T_1$  上  $C$ -Hausdorff 上(下)半连续当且仅当  $M$  在  $T_1$  上的每一点处皆为  $C$ -Hausdorff 上(下)半连续。此时,  $M$  在  $T_1$  上为  $C$ -Hausdorff 连续, 如果  $M$  在  $T_1$  上既  $C$ -Hausdorff 上半连续又  $C$ -Hausdorff 下半连续。

**注 1** 在定义 5 中,  $M$  在  $T_1$  上具有 Berge 上(下)半连续性, 通常简称为  $M$  在  $T_1$  上具有上(下)半连续性。

**注 2** 据定义 5 易知, 若  $M$  在  $T_1$  上 Hausdorff 连续, 则  $M$  在  $T_1$  上  $C$ -Hausdorff 连续, 由文献[31]知, 反之不然。

**引理 4**<sup>[30]</sup> 设  $T_1, T_2$  为拓扑空间,  $M: T_1 \rightarrow 2^{T_2} \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 若  $M$  在  $T_1$  上连续, 则  $M$  在  $T_1$  上  $C$ -Hausdorff 连续。

**注 3** 若  $M$  在  $T_1$  上  $C$ -Hausdorff 连续, 但  $M$  在  $T_1$  上不一定连续, 反例见文献[30]中的例 2.1 和例 2.2。

**引理 5**<sup>[1,28]</sup> 设  $T_1, T_2$  为拓扑空间,  $M: T_1 \rightarrow 2^{T_2} \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 给定  $x_0 \in T_1$ , 则

(i)  $M$  在  $x_0$  处下半连续当且仅当对任何序列  $\{x_n\} \subseteq T_1, x_n \rightarrow x_0$ , 及任意  $y_0 \in M(x_0)$ , 存在  $y_n \in M(x_n)$ , 使得  $y_n \rightarrow y_0$ .

(ii) 对任意  $x_0 \in T_1, M(x_0)$  为紧集, 则  $M$  在  $x_0$  处上半连续当且仅当对任何序列  $\{x_n\} \subseteq T_1, x_n \rightarrow x_0$ , 及任何序列  $y_n \in M(x_n)$ , 存在  $y_0 \in M(x_0)$ , 及子列  $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ , 使得  $y_{n_k} \rightarrow y_0$ .

**引理 6**<sup>[31]</sup> 设  $T_1, T_2$  为拓扑空间,  $M: T_1 \rightarrow 2^{T_2} \setminus \{\emptyset\}$  为非空集值映射, 给定  $x_0 \in T_1$ , 则

(i) 若  $M$  在  $x_0$  处上半连续, 则  $M$  在  $x_0$  处 Hausdorff 上半连续。反之, 若  $M$  在  $x_0$  处 Hausdorff 上半连续且

$M(x_0)$ 为紧集, 则 $M$ 在 $x_0$ 处上半连续。

(ii) 若 $M$ 在 $x_0$ 处Hausdorff下半连续, 则 $M$ 在 $x_0$ 处下半连续。反之, 若 $M$ 在 $x_0$ 处下半连续且 $M(x_0)$ 为紧集, 则 $M$ 在 $x_0$ 处Hausdorff下半连续。

## 2 问题(PSVOP)解集的连续性

首先给出问题(PSVOP)的水平集值映射 $L_{F,E}$ 的上半连续性和下半连续性。

**定理1** 设 $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ ,  $K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为给定非空集值映射, 给定 $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ , 对任意 $y \in K(\mu_0)$ ,  $L_{F,E}(y, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 如果以下条件成立:

- (i)  $K$ 在 $\mu_0$ 处上半连续且 $K(\mu_0)$ 为紧集;
- (ii)  $F$ 在 $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$ 上 $C$ -Hausdorff连续;
- (iii)  $F$ 在 $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$ 上为 $E$ -闭的;

则 $L_{F,E}$ 在 $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$ 上为上半连续的。

**证明** 用反证法。假设 $L_{F,E}$ 在 $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$ 上不是上半连续的, 则存在 $y_0 \in K(\mu_0)$ , 使得 $L_{F,E}$ 在 $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ 处不是上半连续的。从而存在 $L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ 的邻域 $V_0 \subseteq X$ , 对 $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ 的任何邻域 $V_{y_0} \times V_{\lambda_0} \times V_{\mu_0} \subseteq X \times \Lambda \times \Omega$ , 存在 $(y, \lambda, \mu) \in V_{y_0} \times V_{\lambda_0} \times V_{\mu_0} \cap D_{L_{F,E}}$ , 使得

$$L_{F,E}(y, \lambda, \mu) \not\subseteq V_0. \quad (1)$$

由式(1)知, 存在 $\{(y_n, \lambda_n, \mu_n)\} \subseteq D_{L_{F,E}}$ 满足 $(y_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (y_0, \lambda_0, \mu_0)$ , 使得 $L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n) \not\subseteq V_0$ , 故存在 $x_n \in L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 使得

$$x_n \notin V_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

由 $x_n \in L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n)$ 知,  $x_n \in K(\mu_n)$ , 且

$$F(y_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (3)$$

由 $K(\mu_0)$ 为紧集且 $K$ 在 $\mu_0$ 处具有上半连续性, 据引理5的(ii)知, 存在 $x_0 \in K(\mu_0)$ , 及子列 $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ , 使得 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , 则必有 $x_0 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ 。

事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$ ,  $e \in \text{int}(C)$ ,  $\text{int}(C) - \varepsilon \cdot e$ 作为 $0 \in Y$ 的邻域, 由 $F$ 在 $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$ 处是 $C$ -Hausdorff上半连续的知, 当 $n$ 充分大时, 有

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C. \quad (4)$$

由式(3)和式(4)并结合引理3, 知

$$F(y_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + E + C \subseteq F(x_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \quad (5)$$

再由 $F$ 在 $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ 处具有 $C$ -Hausdorff下半连续性, 得

$$F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(y_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C. \quad (6)$$

结合式(5)和式(6)及引理3, 有

$$F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_0, \lambda_0, \mu_0) - 2\varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \quad (7)$$

在式(7)中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 并注意到 $F$ 在 $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$ 上具有 $E$ -闭性, 有

$$F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_0, \lambda_0, \mu_0) + E.$$

故 $x_0 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ . 再由 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ 及以上的邻域 $V_0$ 知, 存在 $K_0 \in \mathbb{N}$ , 当 $k \geq K_0$ 时, 有 $x_{n_k} \in V_0$ , 这与式(2)矛盾。所以,  $L_{F,E}$ 在 $M(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$ 上是上半连续的。

**定理2** 设 $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ ,  $K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为给定非空集值映射, 给定 $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ , 对任意 $y \in K(\mu_0)$ ,  $L_{F,E}(y, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 如果以下条件成立

- (i)  $K$ 在 $\mu_0$ 处连续且 $K(\mu_0)$ 为紧凸集;
- (ii)  $F$ 在 $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$ 上 $C$ -Hausdorff连续;
- (iii)  $F$ 在 $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$ 上为 $E$ -闭的;
- (iv)  $F(\cdot, \lambda_0, \mu_0)$ 在 $K(\mu_0)$ 上为严格 $E$ -拟凸的;

则  $L_{F,E}$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上为下半连续的。

**证明** 用反证法。假设  $L_{F,E}$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上不是下半连续的, 则存在  $y_0 \in K(\mu_0)$ , 使得  $L_{F,E}$  在  $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  处不是下半连续的。据已知条件,  $L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 不失一般性, 存在  $x_1 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ ,  $0 \in X$  的邻域  $V_0 \subseteq X$ , 及  $\{(y_n, \lambda_n, \mu_n)\} \subseteq D_{L_{F,E}}$ , 满足  $(y_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (y_0, \lambda_0, \mu_0)$ , 使得

$$(x_1 + V_0) \cap L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n) = \emptyset. \quad (8)$$

分两种情形讨论。

**情形 1** 若  $L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  为单点集。

设  $x_n \in L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 则有

$$x_n \in K(\mu_n) \quad (9)$$

且

$$F(y_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (10)$$

由  $K(\mu_0)$  为紧集且  $K$  在  $\mu_0$  处为上半连续的, 注意到式(9), 并结合引理 5 的(ii)知存在  $x_0 \in K(\mu_0)$  及子列  $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ , 使得  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . 由式(10), 类似定理 1 的论证过程易知  $x_0 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ . 注意到  $L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  为单点集, 则  $x_0 = x_1$ . 由  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  知, 存在  $K_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $k \geq K_0$  时, 有  $x_{n_k} \in x_0 + V_0 = x_1 + V_0$ , 则

$$x_{n_k} \in (x_1 + V_0) \cap L_{F,E}(y_{n_k}, \lambda_{n_k}, \mu_{n_k}).$$

这与式(8)矛盾。

**情形 2** 若  $L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  为不是单点集。

不失一般性, 假设  $x_1, x_2 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  且  $x_1 \neq x_2$ , 有  $F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_1, \lambda_0, \mu_0) + E$  且  $F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_2, \lambda_0, \mu_0) + E$ . 由  $F(\cdot, \lambda_0, \mu_0)$  在  $K(\mu_0)$  上为严格  $E$ -拟凸的且  $K(\mu_0)$  为凸集, 则对任意  $t \in (0, 1)$ , 有

$$F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(tx_2 + (1-t)x_1, \lambda_0, \mu_0) + \text{int}(E). \quad (11)$$

则对  $t \in (0, 1)$ , 有  $x(t) := tx_2 + (1-t)x_1 \in L_{F,E}(y_0, \lambda_0, \mu_0)$ . 对以上的邻域  $V_0 \subseteq X$ , 存在  $0 \in X$  的邻域  $V_1 \subseteq X$ , 满足  $V_1 + V_1 \subseteq V_0$ . 易知存在  $t_0 \in (0, 1)$ , 满足  $x(t_0) \in x_1 + V_1$ , 有

$$x(t_0) + V_1 \subseteq x_1 + V_1 + V_1 \subseteq x_1 + V_0. \quad (12)$$

由于  $x(t_0) \in K(\mu_0)$  及  $K$  在  $\mu_0$  处为下半连续的, 注意引理 5 的(i)知, 存在  $x_n \in K(\mu_n)$ , 使得  $x_n \rightarrow x(t_0)$ , 则存在  $N_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_0$  时, 有

$$x_n \in L_{F,E}(y_n, \lambda_n, \mu_n). \quad (13)$$

事实上, 对任意  $\varepsilon > 0$ ,  $e \in \text{int}(C)$ ,  $\text{int}(C) - \varepsilon \cdot e$  作为  $0 \in Y$  的邻域, 结合  $F$  在  $(x(t_0), \lambda_0, \mu_0)$  处为  $C$ -Hausdorff 下半连续性知, 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_1$  时, 有

$$F(x(t_0), \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C.$$

由式(11), 并结合引理 3, 知

$$F(y_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C + \text{int}(E) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \quad (14)$$

再由  $F$  在  $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  处为  $C$ -Hausdorff 上半连续的及式(14)知, 存在  $N_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_0 \geq N_1$  时, 有

$$\begin{aligned} F(y_n, \lambda_n, \mu_n) &\subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - 2\varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C + \text{int}(E) \\ &\subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - 2\varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \end{aligned} \quad (15)$$

在式(15)中, 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 并注意到  $F$  在  $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$  上为  $E$ -闭的, 得

$$F(y_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) + E.$$

故式(13)成立。

又由  $x_n \rightarrow x(t_0)$ , 对  $0 \in X$  的给定邻域  $V_1 \subseteq X$ , 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_2$  时, 有

$$x_n \in x(t_0) + V_1. \quad (16)$$

取  $n_0 = \max\{N_0, N_2\}$ , 当  $n \geq n_0$  时, 由式(12)、式(13)和式(16)知

$$x_n \in (x_1 + W_0) \cap L_F(y_n, \lambda_n, \mu_n).$$

这与式(8)矛盾, 故  $L_{F,E}$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上为下半连续的。

**定理3** 设  $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}, K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  为给定非空集值映射, 给定  $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ , 对任意  $y \in K(\mu_0), L_{F,E}(y, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 如果以下条件成立:

- (i)  $K$  在  $\mu_0$  处连续且  $K(\mu_0)$  为紧凸集;
- (ii)  $F$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上为  $C$ -Hausdorff 连续的;
- (iii)  $F$  在  $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$  上为  $E$ -闭的;
- (iv)  $F(\cdot, \lambda_0, \mu_0)$  在  $K(\mu_0)$  上为严格  $E$ -拟凸的;

则  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处连续, 且  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为紧闭集。

**证明**

**第1步** 证明  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处上半连续。

假设  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处不是上半连续的, 则存在  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  的邻域  $V_0 \subseteq X$ , 对  $(\lambda_0, \mu_0)$  的任何邻域  $U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 存在  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 使得  $S_{F,E}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \not\subseteq V_0$ . 因此, 存在序列  $\{(\lambda_n, \mu_n)\} \subseteq U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 满足  $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda_0, \mu_0)$ , 使得  $S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n) \not\subseteq V_0$ . 于是, 存在  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ , 使得

$$x_n \notin V_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

由  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$  知,  $x_n \in K(\mu_n)$ . 又由  $K(\mu_0)$  为紧集且  $K$  在  $\mu_0$  处具有上半连续性, 并注意到引理5的(ii)知, 存在  $x_0 \in K(\mu_0)$ , 及子列  $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ , 使得  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . 不失一般性, 不妨设  $x_n \rightarrow x_0$ , 则必有  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$ . 事实上, 若  $x_0 \notin S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$ , 则存在  $\bar{x} \in K(\mu_0)$ , 使得

$$F(x_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(\bar{x}, \lambda_0, \mu_0) + E.$$

从而  $\bar{x} \in L_{F,E}(x_0, \lambda_0, \mu_0)$ . 由定理2知,  $L_{F,E}$  在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  处是下半连续的, 因此对  $\bar{x} \in L_{F,E}(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  及  $\bar{x}$  的任何邻域  $V \subseteq X$ , 存在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  的邻域  $V_{x_0} \times V_{\lambda_0} \times V_{\mu_0} \subseteq X \times \Lambda \times \Omega$ , 使得

$$V \cap L_{F,E}(x, \lambda, \mu) \neq \emptyset, \quad (x, \lambda, \mu) \in V_{x_0} \times V_{\lambda_0} \times V_{\mu_0}. \quad (18)$$

由于  $(x_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (x_0, \lambda_0, \mu_0)$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $(x_n, \lambda_n, \mu_n) \in V_{x_0} \times V_{\lambda_0} \times V_{\mu_0}$ . 由式(18), 得  $V \cap L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n) \neq \emptyset, n \geq N$ . 设  $\bar{x}_n \in V \cap L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 对任意  $n \geq N$ , 有

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(\bar{x}_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (19)$$

这与  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$  矛盾, 故  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$ . 再由  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0) \subseteq V_0$ , 有  $x_0 \in V_0$ . 注意到  $x_n \rightarrow x_0$ , 对  $x_0$  的邻域  $V_0$ , 存在  $N_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_0 \geq N$  时, 有  $x_n \in V_0$ , 这与式(17)矛盾, 故  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处是上半连续的。

**第2步** 证明  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为紧闭集。

任取  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ . 由  $x_n \in K(\mu_n)$  及条件(i)知,  $x_0 \in K(\mu_0)$ . 类似于第1步的论证过程可知  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$ , 故  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为闭集. 注意到条件(i)易知  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为紧集, 且  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0) \subseteq K(\mu_0)$ .

**第3步** 证明  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处下半连续。

假设  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处不是下半连续的, 则存在  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$ , 对  $x_0$  的任何邻域  $W_0 \subseteq X$ , 及  $(\lambda_0, \mu_0)$  的任何邻域  $U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 存在  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 使得  $W_0 \cap S_{F,E}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \emptyset$ . 则存在序列  $\{(\lambda_n, \mu_n)\} \subseteq U_{\lambda_0} \times U_{\mu_0}$ , 满足  $(\lambda_n, \mu_n) \rightarrow (\lambda_0, \mu_0)$ , 使得

$$W_0 \cap S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n) = \emptyset. \quad (20)$$

由  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0) \subseteq K(\mu_0)$  及  $K$  在  $\mu_0$  处具有下半连续性, 利用引理5的(i)知存在  $x_n \in K(\mu_n)$ , 使得  $x_n \rightarrow x_0$ . 再由定理2知,  $L_{F,E}$  在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  处是下半连续的. 因此, 对  $x_0 \in L_{F,E}(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  及  $x_0$  的上述邻域  $W_0 \subseteq X$ , 存在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  的邻域  $W_{x_0} \times W_{\lambda_0} \times W_{\mu_0} \subseteq X \times \Lambda \times \Omega$ , 使得

$$W_0 \cap L_{F,E}(x, \lambda, \mu) \neq \emptyset, \quad (x, \lambda, \mu) \in (W_{x_0} \times W_{\lambda_0} \times W_{\mu_0}) \cap D_{L_{F,E}}. \quad (21)$$

由  $(x_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (x_0, \lambda_0, \mu_0)$  知, 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $(x_n, \lambda_n, \mu_n) \in W_{x_0} \times W_{\lambda_0} \times W_{\mu_0}$ . 再由

$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) + E$  知,  $x_n \in L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 则  $L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n) \neq \emptyset$ . 由式(19)知,  $W_0 \cap L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n) \neq \emptyset$ . 设  $\bar{x}_n \in W_0 \cap L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 则  $\bar{x}_n \in W_0, \bar{x}_n \in K(\mu_n)$ , 且

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(\bar{x}_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (22)$$

则必有  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ .

事实上, 若  $x_n \notin S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ , 则存在  $\bar{y}_n \in K(\mu_n)$ , 使得

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(\bar{y}_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (23)$$

由  $K(\mu_0)$  为紧集且  $K$  在  $\mu_0$  处是上半连续的, 结合引理 5 的(ii)知, 存在  $y_0 \in K(\mu_0)$ , 使得  $y_n \rightarrow y_0$  (若有必要, 可选取  $\{y_n\}$  的子列  $\{y_{n_k}\}$ ). 对任意  $\varepsilon > 0, e \in \text{int}(C), \text{int}(C) - \varepsilon \cdot e$  作为  $0 \in Y$  的邻域, 并注意到  $F$  在  $(y_0, \lambda_0, \mu_0)$  处具  $C$ -Hausdorff 上半连续性知, 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_1$  时, 有

$$F(\bar{y}_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C. \quad (24)$$

由式(23)和式(24), 并结合引理 3, 知

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C + E \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \quad (25)$$

又由  $L_{F,E}$  在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  处具有  $C$ -Hausdorff 下半连续性及  $(x_n, \lambda_n, \mu_n) \rightarrow (x_0, \lambda_0, \mu_0)$ , 知存在  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N_2$  时, 有

$$F(x_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(x_n, \lambda_n, \mu_n) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C. \quad (26)$$

取  $N = \max(N_1, N_2)$ , 当  $n \geq N$  时, 结合式(25)和式(26), 并注意到引理 3, 得

$$F(x_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(E) - \varepsilon \cdot e + \text{int}(C) + C \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) - 2\varepsilon \cdot e + \text{int}(E). \quad (27)$$

在式(27)中, 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 并注意到  $F$  在  $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$  上为  $E$ -闭的, 有

$$F(x_0, \lambda_0, \mu_0) \subseteq F(y_0, \lambda_0, \mu_0) + E.$$

这与  $x_0 \in S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  矛盾, 故  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ . 以下证  $\bar{x}_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ .

事实上, 若  $\bar{x}_n \notin S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ , 则存在  $y_n \in K(\mu_n)$ , 使得

$$F(\bar{x}_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(y_n, \lambda_n, \mu_n) + E. \quad (28)$$

由  $K(\mu_0)$  为紧集且  $K$  在  $\mu_0$  处是上半连续的, 结合引理 5 的(ii)知, 存在  $y_0 \in K(\mu_0)$ , 使得  $y_n \rightarrow y_0$  (若有必要, 可选取  $\{y_n\}$  的子列  $\{y_{n_k}\}$ ). 据定理 1 知,  $L_{F,E}$  在  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  处上半连续, 及  $\bar{x}_n \in L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 则存在  $\bar{x} \in L_{F,E}(x_0, \lambda_0, \mu_0)$ , 使得  $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}$  (若有必要, 可选取  $\{\bar{x}_n\}$  的子列  $\{\bar{x}_{n_k}\}$ ). 据式(22)和式(28), 知

$$F(x_n, \lambda_n, \mu_n) \subseteq F(\bar{x}_n, \lambda_n, \mu_n) + E \subseteq F(y_n, \lambda_n, \mu_n) + E.$$

这与  $x_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$  矛盾, 故  $\bar{x}_n \in S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ . 又由  $\bar{x}_n \in W_0 \cap L_{F,E}(x_n, \lambda_n, \mu_n)$ , 则  $\bar{x}_n \in W_0 \cap S_{F,E}(\lambda_n, \mu_n)$ , 这与式(20)矛盾, 故  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处是下半连续的。

据定理 3 及引理 6 得

**定理 4** 设  $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}, K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  为给定非空集值映射, 给定  $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ , 对任意  $y \in K(\mu_0), L_{F,E}(y, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 若以下条件成立

- (i)  $K$  在  $\mu_0$  处连续且  $K(\mu_0)$  为紧凸集;
- (ii)  $F$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上为  $C$ -Hausdorff 连续的;
- (iii)  $F$  在  $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$  上为  $E$ -闭的;
- (iv)  $F(\cdot, \lambda_0, \mu_0)$  在  $K(\mu_0)$  上为严格  $E$ -拟凸的;

则  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处 Hausdorff 连续, 且  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为紧闭集。

据定理 3 及引理 4 得

**定理 5** 设  $F: X \times \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}, K: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  为给定非空集值映射, 给定  $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ , 对任意  $y \in K(\mu_0), L_{F,E}(y, \lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ , 若以下条件成立:

- (i)  $K$  在  $\mu_0$  处连续且  $K(\mu_0)$  为紧凸集;
- (ii)  $F$  在  $K(\mu_0) \times \{\lambda_0\} \times \{\mu_0\}$  上为  $C$ -Hausdorff 连续的;
- (iii)  $F$  在  $K(\Omega) \times \Lambda \times \Omega$  上为  $E$ -闭的;
- (iv)  $F(\cdot, \lambda_0, \mu_0)$  在  $K(\mu_0)$  上为严格  $E$ -拟凸的;

则  $S_{F,E}$  在  $(\lambda_0, \mu_0)$  处  $C$ -Hausdorff 连续, 且  $S_{F,E}(\lambda_0, \mu_0)$  为紧闭集。

#### 参考文献:

- [1] LUC D T. Theory of vector optimization [M]. Berlin: Springer, 1989.
- [2] SAWARAGI Y, MAKAYAMA H, TANINO T. Theory of multiobjective optimization [M]. New York: Academic Press, 1985.
- [3] LUCCHETTI R E, MIGLIERINA E. Stability for convex vector optimization problems [J]. Optimization, 2004, 53(5/6): 517-528.
- [4] HUANG X X. Stability in vector-valued and set-valued optimization [J]. Math Methods Oper Res, 2000, 52(2): 185-193.
- [5] HUANG X X, YANG X Q. On characterizations of proper efficiency for nonconvex multiobjective optimization [J]. J Glob Optim, 2002, 23(3): 213-231.
- [6] LALITHA C S, CHATTERJEE P. Stability and scalarization of weak efficient, efficient and Henig proper efficient sets using generalized quasiconvexities [J]. J Optim Theory Appl, 2012, 155(3): 941-961.
- [7] ANH L Q, HUNG N V. On the stability of solution mappings for parametric generalized vector quasivariational inequality problems of the Minty type [J]. Filomat, 2017, 31(3): 747-757.
- [8] ANH L Q, HUNG N V. Stability of solution mappings for parametric bilevel vector equilibrium problems [J]. Comp Appl Math, 2018, 37(2): 1537-1549.
- [9] HUNG N V, HAI N M. Stability of approximating solutions to parametric bilevel vector equilibrium problems and applications [J]. Comp Appl Math, 2019, 38(2): 57.
- [10] HUNG N V. On the stability of the solution mapping for parametric traffic network problems [J]. Indag Math, 2018, 29(3): 885-894.
- [11] CHENG Y H, ZHU D L. Global stability for the weak vector variational inequality [J]. J Glob Optim, 2005, 32(4): 543-550.
- [12] GONG X H. Continuity of the solution set to parametric weak vector equilibrium problems [J]. J Optim Theory Appl, 2008, 139(1): 35-46.
- [13] GONG X H, YAO J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems [J]. J Optim Theory Appl, 2008, 138(2): 197-205.
- [14] CHEN C R, LI S J. On the solution continuity of parametric generalized systems [J]. Pacific J Optim, 2010, 6(1): 141-151.
- [15] HAN Y, GONG X H. Semicontinuity of solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems [J]. Numer Funct Anal Optim, 2016, 37(11): 1420-1437.
- [16] HAN Y, HUANG N J. Stability of efficient solutions to parametric generalized vector equilibrium problems [J]. Sci China Math, 2017, 47(3): 397-408.
- [17] CHICCO M, MIGNANEGO F, PUSILLO L, et al. Vector optimization problems via improvement sets [J]. J Optim Theory Appl, 2011, 150(3): 516-529.
- [18] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization [J]. Eur J Oper Res, 2012, 223(2): 304-311.
- [19] ZHAO K Q, YANG X M. A unified stability result with perturbations in vector optimization [J]. Optim Lett, 2013, 7(8): 1913-1919.
- [20] ZHAO K Q, YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization [J]. Optimization, 2015, 64(4): 1777-1793.
- [21] OPPEZZI P, ROSSI A. Improvement sets and convergence of optimal points [J]. J Optim Theory Appl, 2015, 165(2): 405-419.
- [22] OPPEZZI P, ROSSI A. Existence and convergence of optimal points with respect to improvement sets [J]. SIAM J Optim, 2016, 26(2): 1293-1311.
- [23] XU D Y, LI S J. On the solution continuity of parametric set optimization problems [J]. Math Methods Oper Res, 2016,

- 84(1): 223–237.
- [24] KHOSHKHABAR-AMIRANLOO S. Stability of minimal solutions to parametric set optimization problems [J]. *Appl Anal*, 2018, 97(14): 1–13.
- [25] MAO J Y, WANG S H, HAN Y. The stability of the solution sets for set optimization problems via improvement sets [J]. *Optimization*, 2019, 68(11): 1–23.
- [26] 孟旭东, 王三华. 含参广义集值优化问题解集映射的连续性[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2018, 56(4): 830–836.
- [27] 孟旭东, 周蓉. 参数强向量原始与对偶均衡问题解映射的 Lipschitz 连续性[J]. *南昌大学学报(理科版)*, 2020, 44(4): 313–316+322.
- [28] 邵重阳, 彭再云, 刘芙蓉, 等. 改进集映射下参数广义向量拟平衡问题解映射的 Berge 下半连续性[J]. *应用数学和力学*, 2020, 41(8): 912–920.
- [29] PENG Z Y, WANG Z Y, YANG X M. Connectedness of solution sets for weak generalized symmetric Ky Fan inequality problems via addition-invariant sets [J]. *J Optim Theory Appl*, 2020, 185: 188–206.
- [30] XU X, XU D Y, SUN Y M. Semicontinuity of the minimal solution set mappings for parametric set-valued vector optimization problems [J]. *J Oper Res Soc China*, 2021, 9: 441–454.
- [31] GÖPFERT A, RIAHI H, TAMMER C, et al. *Variational methods in partially ordered spaces* [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [32] DHINGRA M, LALITHA C S. Set optimization using improvement sets [J]. *Yugosl J Oper Res*, 2017, 27(2): 153–167.

(责任编辑 冯兆永)